

Aplicación del análisis dimensional sobre la eficiencia de buceo en Cetáceos: un ejercicio teórico para la materia de Biología matemática

Jorge Ricardo Gersenowies Rodríguez

Laboratorio de Anatomía Animal Comparada, Unidad de Morfología y Función, Facultad de Estudios Superiores Iztacala, Universidad Nacional Autónoma de México, Avenida de los Barrios Número 1, Colonia Los Reyes Iztacala Tlalnepantla, Estado de México, C.P. 54090, México
laac_umf_fesi@hotmail.com

Resumen: como parte de los conocimientos básicos de la asignatura de Biología matemática, se deduce en base al análisis dimensional una ecuación para relacionar la masa corporal con el tiempo de inmersión de los Cetáceos. Para realizar la comparación se calculan los tiempos de inmersión para una masa de 100 kg. Al comparar los coeficientes utilizando datos reales que se presentan en la literatura se obtuvieron evidencias que la ecuación encontrada permite agrupar a los cetáceos en grupos que poseen semejanzas en cuanto a su capacidad de buceo y su tamaño corporal.

Palabras clave: Análisis dimensional. Tiempo de inmersión. Cetáceos. Ley de Kleiber

INTRODUCCIÓN

La capacidad de buceo prolongado es una de las adaptaciones más impresionantes de los mamíferos marinos, los cuales presentan periodos de inmersión de 10 a 49 minutos (WILSON, 1989). Para lograr dicha capacidad en el curso de su evolución, la selección favoreció a los organismos que al azar adquirieron un patrón morfofisiológico caracterizado por:

- Un reflejo de buceo que se caracteriza por una marcada braquicardia y redistribución de la circulación irrigando preferentemente al cerebro, corazón y algunas glándulas endocrinas (RANDAL *et al.*, 1998).
- Una concentración de 3 a 4 veces más alta en la mioglobina muscular (LENFANT, 1969).

Estas adaptaciones son las respuesta a los principales problemas que enfrentan los cetáceos, así, cuando se encuentran sumergidos existe la falta de oxígeno, dificultad para eliminar el bióxido de carbono y la falta de una distribución adecuada

del oxígeno (KOOYMAN, 1973). A la cual se le suma la conservación del calor en animales que se sumergen a profundidades con una zona de baja temperatura.

El buceo de los cetáceos es un tema que ha atraído a diferentes investigadores debido a que son los únicos mamíferos exclusivamente acuáticos. Las investigaciones realizadas se han enfocado a describir sus adaptaciones al medio (KOOYMAN, 1973), siendo la mayor parte de los trabajos realizados en odontocetos como la beluga (MARTIN y SMITH, 1992); delfín tursion (KANWISHER y RIDWAY, 1983); estenela moteada (LEATHERWOOD y LJUNGBLAD, 1974); delfín común (EVANS, 1971); delfín de costado blanco (HALL, 1970); calderón y la orca (BOWERS y HENDERSON, 1972). Siendo en general escasos los estudios en Mysticetos (BASTIDA, *et al.*, 1995).

En el presente trabajo, como parte de los ejercicios de modelado de la asignatura de biología matemática, se obtiene a través del análisis dimensional una relación entre el tiempo de inmersión con el tamaño de los cetáceos tanto en longitud como en masa.

RELACIÓN ENTRE LA TASA METABÓLICA Y EL TAMAÑO CORPORAL

Dentro de los seres vivos, existen dos estrategias metabólicas para la conservación de la temperatura, la de aquellos organismos en los cuales su temperatura cambia conforme varia la temperatura ambiental, los cuales son llamados de forma genérica ectotermos (que toman el calor del exterior) o poiquilotermos (que poseen varias temperaturas) y los que mantienen una temperatura constante que se les conocen como endotermos (que producen su calor) o homotermos (que poseen temperatura constante) (RANDAL *et al.*, 1998).

El sistema muscular, es el encargado de transformar la energía química en energía mecánica. Esto lo hace con una eficiencia de alrededor del 25%, es decir de cada 100 cal de energía química suministrada por los nutrientes, 25 cal son aprovechados realizando algún tipo de trabajo metabólico y las restantes 75 cal se transforman en calor difundiéndose a través de las superficies corporales como es la piel y el sistema respiratorio. Dado que este calor se pierde a través de la superficie, se debe disipar a una tasa proporcional a L^2 . Por lo tanto, si la tasa metabólica aumentara conforme se incrementa la masa muscular los animales de mayor tamaño se sobrecalentarían. Esto nos lleva a considerar que la tasa metabólica (T_m) es proporcional al área superficial del organismo (o a la superficie de difusión térmica, como puede ser, por ejemplo. El área alveolar) (SCHMIDT-NIELSEN, 1984)

$$T_m \propto A$$

En donde:

T_m = tasa metabólica.

A = área corporal.

La cual describe bastante bien la difusión de calor para cualquier ser vivo. Sin embargo, en todos los organismos endotermos poseen una forma básicamente cilíndrica. MAX KLEIBER (1972) ha señalado que existe una relación constante entre la longitud " L " y el radio " r " del cilindro todo endoterma, esta se expresa como:

$$L \propto r^{2/3}$$

Esta es conocida como la ley de Kleiber, y su conocimiento tiene aplicaciones directa en la nutrición animal (Kleiber, 1972).

En este contexto consideraremos que el metabolismo son todas las funciones del individuo que involucran intercambio de materia y de la energía total del sistema. Estos procesos generalmente producen una forma degenerada de energía llamada calor, la cual se mide en calorías o joules, siendo su unidad más común la kcal. Dado que el producto final del metabolismo es la generación de calor, es mediante este que los individuos mantienen su temperatura corporal (KLEIBER, 1972).

LA RELACIÓN DE LA TASA METABÓLICA Y EL TAMAÑO EN HOMEOTERMOS

Procedamos a responder a la pregunta de ¿Cómo se relaciona la tasa metabólica con la masa en un endoterma?

Considerando la tasa metabólica obtenida arriba.

$$T_m \propto A$$

Como los organismos homeotermos poseen una forma básicamente cilíndrica, debemos poner el área en función del radio " r ", por lo cual tenemos que:

$$A \propto r^2$$

Por lo tanto la tasa metabólica se transforma en:

$$T_m \propto r^2$$

Pero como todo volumen cilíndrico es directamente proporcional al producto de su base " r^2 " por su altura " l ", así tenemos que el volumen sería:

$$V \propto r^2 L$$

Como:

$$M \propto V$$

Entonces tenemos que:

$$M \propto r^2 L$$

Pero como todo organismo homeotermo cumple con la ley de Kleiber de $L \propto r^{2/3}$, esta relación se transforma en:

$$M \propto r^2 r^{2/3}$$

$$M \propto r^{8/3}$$

Despejando a "r":

$$r \propto M^{3/8}$$

Sustituyendo en la tasa metabólica:

$$Tm \propto r^2$$

$$Tm \propto (M^{3/8})^2$$

$$Tm \propto M^{3/4}$$

Obteniendo de este modo la relación buscada.

SUPUESTOS PARA DETERMINAR LA RELACIÓN ENTRE EL TIEMPO DE INMERSIÓN Y EL TAMAÑO EN CETÁCEOS

Ya con los elementos desarrollados procedamos a buscar la relación entre el tiempo de inmersión y el tamaño. Para ello es necesario proponer dos supuestos de cómo puede ser dicha relación.

Primer supuesto: Una suposición lógica para resolver el problema, sería que la tasa metabólica consume después de un cierto tiempo el oxígeno que el organismo almaceno antes de iniciar la inmersión, esto lo podemos expresar como:

$$Tm_{xt} \propto V \left(O_2 \right)$$

En donde:

T_m = Tasa metabólica.

t = Tiempo.

$V(O_2)$ = Volumen de oxígeno almacenado.

Como el volumen debe ser proporcional a la masa podemos considerar que:

$$V(O_2) \propto M$$

En donde:

M = Masa.

$V(O_2)$ = Volumen de oxígeno almacenado.

Segundo supuesto: Dado que todo cetáceo es un mamífero, y como todo mamífero es homeotermo, se puede suponer que sigue la ley de Kleiber, es decir:

$$T_m \propto M^{3/4}$$

En donde:

T_m = Tasa metabólica.

M = Masa

OBTENCIÓN DE LA RELACIÓN ENTRE EL TIEMPO DE INMERSIÓN Y EL TAMAÑO EN CETÁCEOS

Combinando los dos supuestos obtenemos que:

$$M^{3/4} t \propto M$$

Despejando el tiempo "t":

$$t \propto \frac{M}{M^{3/4}}$$

$$t \propto M^{1/4}$$

Quitando el signo de proporcionalidad, agregando una constante de "k":

$$t = kM^{1/4}$$

Despejando:

$$k = \frac{t}{M^{1/4}} \quad \text{Ecuación 1 (Ec.1)}$$

Esta última ecuación obtener el valor de constante la cual es propia de la especie considerada y nos permite determinar el tiempo de inmersión para cualquier cetáceo de acuerdo a su masa.

APLICACIÓN Y CONSECUENCIAS DEL MODELO

La aplicación inmediata de la ecuación Ec. 1, es la comparación entre los patrones morfofuncionales de diferentes especies. Para ello consideraremos que dentro de los cetáceos, debido a que tuvieron un antecesor común, debe de compartir un patrón morfofuncional, esto es muy importante dado que la semejanza en el patrón puede ser una medida del grado de parentesco entre las especies (MAINX, 1957). Para poder llevar a cabo la comparación consideremos la Tabla 1, en donde se presentan los datos recopilados por NOREN y WILLIAMS (2000) para la masa y los tiempos de inmersión para diferentes especies de cetáceos.

Procedemos a calcular el valor de “k” para cada una de las especies de la Tabla 1, es decir, como ejemplo para la especie *Delphinus capensis* el valor de “k” es:

$$k = \frac{t}{M^{1/4}} = \frac{5 \text{ min}}{(10 \text{ kg})^{1/4}} = 1.7286 \text{ min kg}^{-1/4}$$

De esta forma obtenemos la Tabla 2.

Una forma simple de comparar los patrones morfofisiológicos es obtener el tiempo de inmersión cuando los organismos poseen el mismo tamaño, en nuestro problema consideraremos que cada una de las especies posee un organismo con una masa de 100 kg, así para *Delphinus capensis* su masa sería:

$$t = kM^{1/4} = 1.7286 * (100)^{1/4} = 5.47 \text{ min}$$

Especie de cetáceo	Masa (kg)	Tiempo máximo de inmersión (min)
Odontocetos		
<i>Delphinus capensis</i>	70	5
<i>Delphinus delphis</i>	70	5
<i>Phocoena phocoena</i>	70	5,35
<i>Stenella attenuata</i>	75	4,7
<i>Lissodelphis borealis</i>	115	6,25
<i>Lagenorhynchus obliquidens</i>	120	6,2
<i>Tursiops truncatus</i>	200	8
<i>Kogia breviceps</i>	363	12
<i>Delphinapterus leucas</i>	1400	18,3
<i>Monodon monoceros</i>	1500	25
<i>Ziphius cavirostris</i>	2953	30
<i>Hyperoodon ampullatus</i>	6700	60
<i>Physeter macrocephalus</i>	36700	73
Misticetos		
<i>Balaenoptera borealis</i>	23000	20
<i>Balaenoptera physalus</i>	33000	14
<i>Balaena mysticetus</i>	80000	31

Tabla 1. Medidas de los tiempos de inmersión y masa para diferentes especies de cetáceos (tomados de NOREN y WILLIAMS 2000).

Especie de cetáceo	K (min ^{1/4} kg ^{-1/4})
Odontocetos	
<i>Delphinus capensis</i>	1,7286
<i>Delphinus delphis</i>	1.7286
<i>Phocoena phocoena</i>	1.8496
<i>Stenella attenuata</i>	1.5871
<i>Lissodelphis borealis</i>	1.9086
<i>Lagenorhynchus obliquidens</i>	1.8733
<i>Tursiops truncatus</i>	2.1273
<i>Kogia breviceps</i>	2.7492
<i>Delphinapterus leucas</i>	2.9917
<i>Monodon monoceros</i>	4.0171
<i>Ziphius cavirostris</i>	4.0696
<i>Hyperoodon ampullatus</i>	6.6318
<i>Physeter macrocephalus</i>	5.2742
Misticetos	
<i>Balaenoptera borealis</i>	1.6240
<i>Balaenoptera physalus</i>	1.0387
<i>Balaena mysticetus</i>	1.8433

Tabla 2. Valores calculados de “k” para diferentes especies de cetáceos utilizando los datos de NOREN y WILLIAMS (2000).

Por lo cual obtenemos la Tabla 3 en donde se presentan los tiempos al mismo nivel de escala:

Especie de cetáceo	t (min)
Odontocetos	
<i>Delphinus capensis</i>	5.47
<i>Delphinus delphis</i>	5.47
<i>Phocoena phocoena</i>	5.85
<i>Stenella attenuata</i>	5.02
<i>Lissodelphis borealis</i>	6.04
<i>Lagenorhynchus obliquidens</i>	5.92
<i>Tursiops truncatus</i>	6.73
<i>Kogia breviceps</i>	8.69
<i>Delphinapterus leucas</i>	9.46
<i>Monodon monoceros</i>	12.70
<i>Ziphius cavirostris</i>	12.87
<i>Hyperoodon ampullatus</i>	20.97
<i>Physeter macrocephalus</i>	16.68
Misticetos	
<i>Balaenoptera borealis</i>	5.14
<i>Balaenoptera physalus</i>	3.28
<i>Balaena mysticetus</i>	5.83

Tabla 3. Valores calculados del tiempo de inmersión teórico para un espécimen de 100 kg para cada una de las especies de cetáceos reportados por NOREN y WILLIAMS (2000).

La igualdad implica que el patrón morfofisiológico es idéntico entre las especies estudiadas, sin embargo, una característica de los seres vivos es su variabilidad que afectaría a la igualdad. Una variabilidad máxima del 20% es considerada por GOULD (1994) como típica del patrón, la cual será la que consideraremos.

Procedamos a obtener los límites considerando una variación del 20% (=0.2), de así obtenemos que para *Delphinus capensis* los límites serían:

$$\frac{5.47 \text{ min} \times 0.2}{2} = 0.55$$

Este valor se resta al tiempo encontrado para obtener el límite inferior, y para el límite superior se suma, decir para *Delphinus capensis* serían:

$$\text{Límite Inferior} = 5.47 - 0.55 = 4.92$$

$$\text{Límite superior} = 5.47 + 0.55 = 6.02$$

Al obtener los límites de todas las especies consideradas a partir de la Tabla 3, obtenemos la Tabla 4.

Especie de cetáceo	t (min)	Límite inferior	Límite superior
Odontocetos			
<i>Delphinus capensis</i>	5.47	4.92	6.02
<i>Delphinus delphis</i>	5.47	4.92	6.02
<i>Phocoena phocoena</i>	5.85	5.26	6.44
<i>Stenella attenuata</i>	5.02	4.52	5.52
<i>Lissodelphis borealis</i>	6.04	5.44	6.64
<i>Lagenorhynchus obliquidens</i>	5.92	5.33	6.51
<i>Tursiops truncatus</i>	6.73	6.06	7.40
<i>Kogia breviceps</i>	8.69	7.82	9.56
<i>Delphinapterus leucas</i>	9.46	8.51	10.41
<i>Monodon monoceros</i>	12.70	11.43	13.97
<i>Ziphius cavirostris</i>	12.87	11.58	14.16
<i>Hyperoodon ampullatus</i>	20.97	18.87	23.07
<i>Physeter macrocephalus</i>	16.68	15.01	18.35
Misticetos			
<i>Balaenoptera borealis</i>	5.14	4.63	5.65
<i>Balaenoptera physalus</i>	3.28	2.95	3.61
<i>Balaena mysticetus</i>	5.83	5.25	6.41

Tabla 4. Valores calculados de los límites inferior y superior del tiempo de inmersión teórico para un espécimen de 100 kg para cada una de las especies de cetáceos reportados por NOREN y WILLIAMS (2000).

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Con estos datos analizar el patrón morfofisiológico de la inmersión en cetáceos, para llevarlo a cabo se dividirá en patrones definidos por el tiempo de inmersión de acuerdo a los siguientes criterios:

- **Patrón I (malos buceadores):** Son los organismos que cuando pesan 100 kg poseen el patrón más bajo de inmersión, el cual se considera menor de 4 minutos, en este grupo solo encontramos a una especie de misticeto, *Balaenoptera physalus*.
- **Patrón II (buceadores):** Son los organismos que cuando pesan 100 kg poseen un tiempo de inmersión entre los 4 y 7 minutos, en este grupo encontramos a las especies de odontoceto *Delphinus capensis*, y *Delphinus delphis*, *Phocoena phocoena*, *Stenella attenuata*, *Lissodelphis borealis*, *Lagenorhynchus obliquidens*, y *Tursiops truncatus*, y de los misticetos *Balaenoptera borealis* y *Balaena mysticetus*. El patrón de inmersión de las especies *Delphinus capensis*, *Delphinus delphis*, *Phocoena phocoena*, *Stenella attenuata*, *Lissodelphis borealis* y *Lagenorhynchus obliquidens* es básicamente el mismo, siendo el que posee el menor tiempo de inmersión entre los odontocetos.

- **Patrón III (buenos buceadores):** Son los organismos que cuando pesan 100 kg poseen un tiempo de inmersión entre los 7 y 15 minutos, en este grupo encontramos a las especies de odontoceto *Monodon monoceros* y *Ziphius cavirostris*.
- **Patrón IV (excelentes buceadores):** Son los organismos que cuando pesan 100 kg poseen un tiempo de inmersión mayor de 15 minutos, en este grupo encontramos a las especies de odontoceto *Hyperoodon ampullatus* y *Physeter macrocephalus*.

CONCLUSIONES

Se encontró una ecuación (Ec. 1) que nos permite realizar comparaciones en los tiempos de inmersión de diferentes especies de cetáceos a partir de información reportada en trabajos de investigación, de esta forma podemos compararlos entre sí y llegar a conclusiones plausibles.

De esta forma podemos tener evidencias los odontocetos son mejores buceadores que los misticetos.

La valides del modelo no se considera completamente establecido dado que eso solo se lograra aplicando el modelo a mas especies de cetáceos

EJERCICIO

MARINO *et al.* en 2006 reportaron los datos de la Tabla 5.

Especie de cetáceo	Masa cerebral (g)	Masa (kg)	Tiempo máximo de inmersión (min)
<i>Tursiops truncatus</i>	1824	209,53	6,8
<i>Delphinus delphis</i>	815	60,17	5,9
<i>Grampus griseus</i>	2387	328	30
<i>Lagenorhynchus obliquidens</i>	1148	91,05	6,2
<i>Lagenorhynchus acutus</i>	1103	244,667	4
<i>Globicephala macrorhynchus</i>	2893	943,2	27
<i>Orcinus orca</i>	5059	1955,45	10,4
<i>Stenella longirostris</i>	166	66,2	3,5
<i>Steno bredanensis</i>	1542	124,857	15
<i>Sotalia fluviatilis</i>	688	42,24	1,5
<i>Phocoena phocoena</i>	540	51,193	5,35
<i>Phocoenoides dalli</i>	866	86,83	5,6
<i>Lipotes vexillifer</i>	510	82	2,25
<i>Platanista gangetica</i>	295	59,63	3
<i>Kogia breviceps</i>	1012	305	17,7
<i>Kogia sima</i>	622	168,5	43
<i>Physeter macrocephalus</i>	8028	35833,33	73
<i>Ziphius cavirostris</i>	2004	2273	68
<i>Delphinapterus leucas</i>	2083	636	18,3
<i>Monodon monoceros</i>	2997	1578,33	26,2
<i>Balaenoptera physalus</i>	7085	38421,5	16
<i>Balaenoptera musculus</i>	3636	50904	18
<i>Megaptera novaeangliae</i>	6411	39295	21,1

Tabla 5. Medidas de los tiempos de inmersión y masa para diferentes especies de cetáceos (tomados de MARINO *et al.*, 2006).

Con estos datos lleve a cabo el análisis dimensional completo.

1. Obtenga los valores de “k” y ubíquelos en la Tabla 6.

Especie de cetáceo	K (min·kg ^{-1/4})

¿Se puede afirmar que los resultados del análisis dimensional de los datos de NOREN y WILLIAMS (2000), y de MARINO *et al.* (2006) proporcionan valores semejantes de “k”?

¿La conclusión de que la especie *Balaenoptera physalus* es la peor buceadora entre los cetáceos concuerda con lo reportado en la bibliografía especializada?

¿La conclusión que las especies *Hyperoodon ampullatus* y *Physeter macrocephalus* son las mejores buceadoras está apoyada por reportes de la bibliografía especializada?

¿La conclusión que los odontocetos son mejores buceadores que los mysticetos, está apoyada por reportes de la bibliografía especializada?

Para las siguientes preguntas considere la Tabla 9.

¿Se puede decir que algunos pinnípedos son mejores buceadores que los cetáceos?

¿Qué tan buen buceador es el hombre en comparación con los cetáceos y pinnípedos?

Especie	Nombre común	Masa corporal (kg)	Tiempo (min)
<i>Homo sapiens</i>	Hombre	70	6
<i>Leptonychotes weddellii</i>	Foca de Weddell	400	93
<i>Mirounga angustirostris</i>	Elefante marino	400	120
<i>Zalophus californianus</i>	León marino de California	100	10
<i>Physeter macrocephalus</i>	Cachalote	10000	75

Tabla 9. Medidas de los tiempos de inmersión y masa para diferentes especies de cetáceos (tomados de PERRIN *et al.*, 2002).

BIBLIOGRAFÍA

Bastida, R. S.; Morón, S.; Rodríguez, D. y Mandó O. 1995. Breathing behavior of southern right whales in the breeding area of Valdes peninsula (Argentina). En *Abstract of the eleventh Biennial Conference on the biology on marine mammals*. 14-18 December, Orlando florida, USA.

Batschelet, E. 1978. *Matemáticas básicas para biocientíficos*. Ed. Dossat, S. A. España.

- Bower, C. A. y Henderson, R. S. 1972. *Project deep ops: deep objet recovery with pilotand killer whales*. Naval undersea center technical publications 306. San Diego California, USA.
- Evans, W. E. 1971. Orientation behavior of delphinids: radio telemetric studies. *Ann. New York Acad. Sci.*, 188:142-160.
- Gould, S. J. 1994. *Ocho cerditos*. Critica, España.
- Hall, J. D. 1970. *Conditioning pacific white-striped dolphins Lagenorhynchus, for open ocean release*. Naval undersea center technical publications 200. San Diego California, USA.
- Kleiber, M. 1972. *Bioenergética Animal*. Acribia, España.
- Kooyman, G. L. 1973. Respiratory adaptations in marine mammals. *Amer. Zool.*, 13:457-468.
- Leatherwood, S. y Ljunglad, I. 1979. Nighttime swinining and diving behavior of radio-tagged spottid delfin *Stenella attenuata*. *Cetology*, nº 34.
- Lenfant, C. 1969. Physiological properties of blood of marine mammals. en H. T. Andersen (ed) *The biology of marine mammals*. p. 95-116. Academic press, USA.
- Mainx, F. 1957. *Fundamentos de la Biología*. UNAM, México.
- Marino, L.; Sol, D.; Toren, K. y Lefebvre, L. 2006. Does Diving Limit Brain Size in Cetaceans? *Marine Mammal Science*, 22(2): 413–425.
- Martin, A. R. y Smith, G. 1992. Deep diving in wild, free-ranging Beluga whales, *Delphinapterus leucas*. *Can. J. Fish Aquat., Sci.* 49:462-466.
- Noren, S. R. y Williams, T. M. 2000. Body size and skeletal muscle myoglobin of cetaceans: adaptations for maximizing dive duration. *Comparative Biochemistry and Physiology, Part A* 126 : 181–191.
- Ortuño, M. 1996. *Física*. Crítica, España.
- Perrin, W. R.; Wiirsig, B. y Thewissen, J. G. M. (Eds.) 2002. *Encyclopedia of Marine Mammals*. Academic Press, U.S.A.
- Randal, D.; Burggren, W. y French, K. 1998. *Fisiología Animal*. 4ª edición. Mc Graw-Hill Interamericana, México.
- Ranwishwer, J. W. y Ridway, S. H. 1983. The physiological ecology of whales and porpoises. *Scientific American*, 248(6):102-111.

- Schimdt-Nielsen, K. 1984. *Scaling. Why is size so important?* Cambridge University Press. U. K.
- Wilson, J. A. 1989. *Fundamentos de Fisiología Animal*. Limusa, México.

Recibido: 25 de junio 2014.

Aceptado: 15 de diciembre 2014.